**专题12 多面体的外接球和内切球**

**一、结论**

**1．球与多面体的接、切**

定义1；若一个多面体的各顶点都在一个球面上，则称这个多面体是这个球的内接多面体，这个球是多面体的外接球。

定义2；若一个多面体的各面都与一个球的球面相切，则称这个多面体是这个球的外切多面体，这个球是多面体的内切球。

**类型一 球的内切问题（等体积法）**

例如：在四棱锥中，内切球为球，求球半径.方法如下：



即：，可求出.

**类型二 球的外接问题**

**1、公式法**

正方体或长方体的外接球的球心为其体对角线的中点

**2、补形法（补长方体或正方体）**

①墙角模型（三条线两个垂直）

题设：三条棱两两垂直（重点考察三视图）

  

②对棱相等模型（补形为长方体）

题设：三棱锥（即四面体）中，已知三组对棱分别相等，求外接球半径（，，）

**3、单面定球心法（定+算）**

步骤：①定一个面外接圆圆心：选中一个面如图：在三棱锥中，选中底面，确定其外接圆圆心（正三角形外心就是中心，直角三角形外心在斜边中点上，普通三角形用正弦定理定外心）；

②过外心做（找）底面的垂线，如图中面,则球心一定在直线（注意不一定在线段上）上；

③计算求半径:在直线上任取一点如图：则，利用公式可计算出球半径.



**4、双面定球心法（两次单面定球心）**

如图：在三棱锥中：

①选定底面，定外接圆圆心

②选定面，定外接圆圆心

③分别过做面的垂线，和做面的垂线，两垂线交点即为外接球球心.

**二、典型例题**

1．（2022·山西吕梁·一模（文））在《九章算术·商功》中，将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑，如图在鳖臑中，平面，，，则鳖臑内切球的表面积为（ ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【解析】

解：因为四面体四个面都为直角三角形，平面，，所以，，，，设四面体内切球的球心为，则，

所以，

因为四面体的表面积为，

又因为四面体的体积，

所以，所以，

故选：B

**【反思】本例中涉及到求内切球问题，典型的等体积法.**

2．（2021·四川省南充高级中学高二期中（文））在三棱锥*P*－*ABC*中，，，两两垂直，，，，则该三棱锥的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

将三棱锥*P*－*ABC*补全为长方体，则长方体的外接球就是所求的外接球，设球半径为R，则，所以球的表面积为．

故选：D．

**【反思】由题意**，，**两两垂直，可直接用补形法，补成长方体，利用长方体求外接球.**

3．（2021·全国·高一课时练习）已知三棱锥，在底面中，，，面，，则此三棱锥的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

设的外接圆半径为*R*，因为，，由正弦定理得：，所以的外接圆半径为1，设的外接圆圆心为，过点做的平行线，则球心一定在该直线上，设为，因为面，，由于，故，由勾股定理得：，即此三棱锥的外接球的半径为2，故外接球表面积为.



故选：D

**【反思】此题典型的单面定球心求外接球的问题，先确定的外接圆圆心，再过做的平行线，则可确定球心在该直线上，进而通过计算求出外接球半径.**

4.三棱锥中，平面平面，和均为边长为的正三角形，则三棱锥外接球的半径为 .

【解析】:由于是正三角形，并且边长为2，所以的外接圆圆心为,则,,同理可得的外接圆圆心为，可得到，,分别过做面的垂线，过做面的垂线交于，因为平面平面，所以四边形为正方形，且,利用勾股定理：，所以.

**【反思】此题典型的双面定球心，由于选定的面，都是正三角形，故其外心都是中心，如果是普通三角形，可以采用正弦定理定外心.**

**三、针对训练 举一反三**

一、单选题

1．（2021·湖北黄冈·高一期末）若圆锥的内切球(球面与圆锥的侧面以及底面都相切)的半径为，当该圆锥体积是球体积两倍时，该圆锥的高为（　　）

A． B． C． D．

2．（2021·青海·海南藏族自治州高级中学高三开学考试（理））如图正四棱柱中，底面面积为36，的面积为，则三棱锥的外接球的表面积为（ ）



A． B． C． D．

3．（2022·全国·高三专题练习）已知四面体中，平面，，，且，则四面体的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

4．（2021·江苏·金陵中学高一期末）前一段时间，高一年级的同学们参加了几何模型的制作比赛，大家的作品在展览中获得了一致好评．其中一位同学的作品是在球当中放置了一个圆锥，于是就产生了这样一个有趣的问题：已知圆锥的顶点和底面圆周都在球面上，若圆锥的侧面展开图的圆心角为，面积为，则球的表面积等于（ ）

A． B． C． D．

5．（2021·云南·弥勒市一中高二阶段练习）设直三棱柱的所有顶点都在一个球面上，且球的体积是，，，则此直三棱柱的高是（ ）

A．1 B．2 C． D．4

6．（2021·重庆·西南大学附中高一期末）已知正方形中，，是边的中点，现以为折痕将折起，当三棱锥的体积最大时，该三棱锥外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

7．（2021·广西·柳铁一中高三阶段练习（理））在三棱锥中，，，，，则三棱锥外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

8．（2021·江西省南丰县第二中学高一学业考试）已知四棱锥，平面，，，，，二面角的大小为.若四面体的四个顶点都在同一球面上，则该球的体积为（ ）

A． B． C． D．

二、填空题

9．（2022·河南焦作·一模（理））已知三棱锥的每条侧棱与它所对的底面边长相等，且是底边长为，面积为的等腰三角形，则该三棱锥的外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

10．（2022·河南驻马店·高三期末（文））在三棱锥中，底面是以为斜边的等腰直角三角形，，，则三棱锥外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_．

11．（2022·全国·模拟预测（理））已知*A*、*B*、*C*、*D*为空间不共面的四个点，且，则当三棱锥体积最大时，其外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_．

12．（2022·安徽马鞍山·一模（理））三棱锥中，是边长为的等边三角形，，平面平面，则该三棱锥的外接球的体积为\_\_\_\_\_\_

13．（2021·湖北荆州·高一期中）如图，在一个底面边长为2，侧棱长为的正四棱锥中，大球内切于该四棱锥，小球与大球及四棱锥的四个侧面相切，则小球的表面积为\_\_\_\_\_\_．

